

תרגול

קריאה מונחית: *Ars Conjectandi*

Jacob Bernoulli, 1713

עידו בן ארצי · גל עטון · רם אשל



רקע

יעקב ברנולי ו-*Ars Conjectandi*

יעקב ברנולי



Jos. Bernoulli

Jacob Bernoulli · 1654–1705

- **מי:** יעקב ברנולי (1654–1705) מבאזל. למד תיאולוגיה לפי רצון אביו, ובסתר מתמטיקה.
- **התרומה:** הפך את כיוון השאלה. לא “מה יקרה במערכת שחוקיה ידועים”, אלא “מה אפשר ללמוד על מערכת נסתרת מתוך מה שנצפה”. מכאן הפרמטר הנסתר וחוק המספרים הגדולים.
- **הספר:** *Ars Conjectandi*, “אמנות ההשערה”, יצא ב-1713, שמונה שנים אחרי מותו ולא גמור. החלק הרביעי, שנקרא היום, הוא נקודת הפתיחה של הסטטיסטיקה.



פרק 2: על טיעונים ועל השערה

קריאה מונחית של פרק שני בספר של יעקב ברנולי
עמ' 10–13 (טקסט מסומן בסגול)

פרק 2: מקשיבים לברנולי



פרק 2: מה זה לשער?

ההגדרה

בית המשפט

הכללים

כלל ראשון ושני

כלל שלישי ורביעי

כלל תשיעי

שאלה לכיתה (3 מתוך 3): האם ניתן לייחס הסתברות למשהו שכבר קרה?

פרק 2: מה זו אמנות ההשערה

פרק 2 • מה זה לשער?

ההגדרה

חזרה על ההגדרה שהרגע שמענו.

עמ' 10

חלק רביעי: השימוש בתורה הקודמת ויישומה בעניינים אזרחיים, מוסריים וכלכליים

פרק 2. על טיעונים ועל השערה. על אמנות ההשערה.

על היסודות להשערה. כמה אקסיומות כלליות הנוגעות לעניין

על מה שידוע בוודאות ומעבר לכל ספק, אנו אומרים שאנו יודעים. על כל השאר אנו רק משערים. לשער משהו פירושו למדוד את הסתברותו.

לכן אמנות ההשערה מוגדרת כאמנות למדוד את ההסתברות של דברים מדויק ככל האפשר, כדי שנוכל תמיד לבחור, בשיפוטינו ובמעשינו, את מה שיימצא הטוב ביותר.

ההסתברויות נאמדות הן לפי מספר הטיעונים והן לפי משקלם.

פרק 2: דוגמה מבית המשפט

פרק 2 • מה זה לשער?

– ההגדרה

מיד אחרי ההגדרה, ברנולי מדגים מה הם "טיעונים", ושלכל אחד מהם משקל אחר.

עמ' 10

דוגמה: אדם נמצא הרוג ברחוב, ומישהו אחר מואשם ברצח. הטיעונים המאשימים הם:

1. ידוע שהנאשם שנא את ההרוג. טיעון מן הסיבה
2. כשנחקר, החוויר וענה בפחד. טיעון מן התוצאה
3. בביתו נמצא פגיון מגואל בדם. סימן
4. ביום הרצח הלך הנאשם באותה דרך. נסיבות של מקום וזמן
5. עד מעיד שיום לפני הרצח רבו השניים. עדות

שאלה לכיתה: עצרו רגע לחשוב. מדוע ברנולי מביא דוגמה כזו בספר שעוסק בשאלה סטטיסטית? לאיזו מטרה הוא צירף אותה מלכתחילה?

פרק 2: האקסיומות, 1–2

פרק 2 • מה זה לשער?

– ההגדרה

לפני שהוא מראה איך מחשבים, ברנולי מונה כללים "שהשכל הישר מתייב לכל אדם נבון".

עמ' 11

1. בדברים שבהם אפשר להגיע לוודאות גמורה, אין מקום להשערות. אסטרונום לא ינחש אם יהיה ליקוי ירח; הוא יכול לגלות את האמת בחישוב מהימן.
2. לא די לשקול טיעון זה או אחר; יש לבחון את כל הטיעונים שיכולים להגיע לידיעתנו. שלוש ספינות יוצאות מן הנמל, ומדווח שאחת מהן טבעה. אם אשים לב רק למספר הספינות, לכל אחת אותו סיכוי. אבל אחת מהן הייתה ישנה ורעועה, והקברניט שלה צעיר וחסר ניסיון, ולכן ככל הנראה היא זו שאבדה.

שאלה לכיתה: למה חשוב לברנולי לציין את זה? זה לא מובן מאליו?

פרק 2: האקסיומות, 3–4

עמ' 11–12

3. יש לשקול לא רק את הטענות שמוכיחים דבר, אלא גם את אלה שמובילים למסקנה ההפוכה.

חבר נעדר מן העיר זמן רב מאוד: האם נכריז עליו כמת? בעד: עשרים שנה לא שמענו ממנו, ואילו היה חי, היה כותב, כי ידע שירושה מחכה לו. נגד: ידוע שכתב מכתבים בחוסר רצון; אולי הוא שבוי, אולי מכתביו אבדו; ורבים חזרו בשלום אחרי היעדרות ארוכה עוד יותר.

4. כדי לשפוט על דברים כלליים די בטענות כלליים, אבל על אדם מסוים יש לצרף גם טענות פרטיים.

צעיר בן עשרים יחיה כנראה יותר מזקן בן שישים. אבל אם הצעיר חולה וחי ללא מתינות, הזקן עדיין יכול לקוות לחיות יותר.

שאלה לכיתה (2 מתוך 2): לאיזה מושג בסטטיסטיקה Bayesian מתקשרת אקסיומה 4? שימו לב: כשברנולי כתב את זה, Thomas Bayes היה ילד קטן (נולד ב-1701), והמאמר שלו פורסם רק ב-1763.

פרק 2: האקסיומה התשיעית

פרק 2 • מה זה לשער?

– ההגדרה

ברנולי מדלג על כמה כללים, ומגיע לכלל שמלווה את המדע עד היום.

עמ' 12–13

9. ודאות גמורה מושגת רק לעיתים רחוקות, ולכן ההכרח והמנהג רוצים שמה שהוא רק ודאי מוסרית ייחשב ודאי לחלוטין.

לכן היה מועיל אילו הרשויות היו קובעות גבולות לוודאות מוסרית: אם די ב-99/100 כדי להכריע בדבר, או שנדרש 999/1000, כך שלשופט יהיו תמיד סימנים מוצקים שלפיהם יפסוק את דינו.

שאלה לכיתה (3 מתוך 3): עברנו על אקסיומות 1, 2, 3, 4 ו-9. איזו מהן אתם פוגשים היום במחקר בפסיכולוגיה, ואיזו נשכחה?



פרקים 4 ו-5: מהכד אל העולם

קריאה מונחית של הפרקים הרביעי והחמישי בספר של יעקב ברנולי
עמ' 19–21 ו-30 (טקסט מסומן בצהוב)

פרק 4: משל הכד

פרק 4. אפשר ללמוד מניסיון? **תיאור הבעיה הפילוסופית**
בזמן הלימוד חפצו ברנולי מסביר: במשחקי מזל מספר המקרים ידוע מראש, אבל בטבע ובמעשי בני אדם הוא אינו ידוע. מה שאי אפשר לקבוע מראש, אולי אפשר לקבוע בדיעבד, מתוך הניסיון.

הכללת ניסוי הכד

עמ' 19

פרק 4. על שתי דרכים לחקור את מספר המקרים. מה יש לחשוב על דבר שנקבע מתוך הניסיון. בעיה מיוחדת בעניין זה

נניח שבלי ידיעתך מוסתרים בכד שלושת אלפים חלוקים לבנים ואלפיים שחורים. כדי לקבוע את מספרם בניסוי, אתה שולף חלוק אחר חלוק, ובכל פעם מחזיר את החלוק שנשלף, ורושם כמה פעמים יצא לבן וכמה שחור. השאלה: האם תוכל לעשות זאת פעמים רבות כל כך, שיהיה סביר פי עשרה, פי מאה, פי אלף (כלומר, ודאי מוסרית) שהיחס שהוצאת הוא 3 ל-2, ולא יחס אחר? אילו זה לא היה קורה, היה עלינו לפקפק בעצם הרעיון ללמוד מניסיון.

שאלה לכיתה: ברנולי מקפיד לציין שכל חלוק מוחזר לכד. למה זה חשוב לו? מה היה משתנה אילו לא היה מחזיר?

פרק 4: מהכד אל העולם

עמ' 20

אם זה מושג, אנו קובעים את מספר המקרים בדיעבד כמעט כאילו היה ידוע לנו מראש. כי אם נחליף את הכד, למשל, באוויר או בגוף האדם, שמכילים מקורות לשינויים ולמחלות כמו שהכד מכיל חלוקים, נוכל לקבוע מתצפית באותה דרך בדיוק כמה קל יותר למאורע זה או אחר לקרות בהם.

שאלה לכיתה: כדי להחליף את הכד בגוף האדם, ברנולי מניח הנחה סמויה. מהי? והאם היא מתקיימת כשאנחנו מודדים נבדקים בניסוי בפסיכולוגיה?

פרק 4: לא יחס מדויק, אלא מרווח

עמ' 20

היחס לא יתקבל כמדויק, אלא בתוך מרווח בין שני גבולות, קרובים ככל שנרצה: למשל בין 301/200 ל-299/200.

זו אם כן הבעיה שהחלטתי לפרסם כאן, אחרי שידעתי את פתרונה עשרים שנה.

שאלה לכיתה: ברנולי לא מבטיח לנו את היחס המדויק, אלא מרווח סביבו. איפה אתם פוגשים את הרעיון הזה היום, במחקר או בחדשות?

שאלה לכיתה: מדוע אתם סוברים שלקח ליעקב ברנולי 20 שנה כדי להחליט שהוא מפרסם את הבעיה הזו? הרי מדובר רק בבעיה של מספר חלוקים בכד חתום תאורטי?

פרק 4: ברנולי משיב למבקרים

עמ' 20-21

המבקר הראשון: מספר החלוקים מוגדר, ומספר המחלות עמום.
תשובה: ביחס לידיעתנו, שניהם עמומים באותה מידה.

המבקר השני: מספר החלוקים סופי, ומספר המחלות אינסופי.
תשובה: גם יחס בין שני אינסופים אפשר לקרב במספרים סופיים, כמו היחס בין היקף המעגל לקוטרו.

המבקר השלישי: מספר המחלות אינו קבוע, ומחלות חדשות מופיעות בכל יום.
תשובה: מכך נובע רק שלפעמים עלינו לחדש את התצפיות, כמו שהיינו צריכים לחדש אותן אילו החלוקים בכד היו מתחלפים.

שאלה לכיתה (2 מתוך 2): תנו דוגמה מימינו שבה "הכד" השתנה, ותצפיות ישנות הובילו לטעות.

- פרק 2 · מה זה לשער? לשער פירושו למדוד הסתברות, לפי מספר הטיעונים ולפי משקלם.
- פרק 4 · אפשר ללמוד מניסיון? כן: מה שאי אפשר לדעת מראש, קובעים בדיעבד, בתוך מרווח.
- פרק 5 · כמה ניסיון צריך? הרבה: 25,550 תצפיות לוודאות מוסרית של אלף לאחד.

